数学の勉強法

理学系　硲　文夫

　勉強というと，物事を学習する，という意味でよく使いますが，この文章を書くに当たって改めてその意味を調べてみました．すると，中国のいわゆる「四書」のうちの一つ「中庸」に既に使われており，その第二十章の終わりのほうに次の文章があります：

「知仁勇三者，天下之達徳也，…，或安而行之，或利而行之，或勉強而行之，及其成功，一也.」

読み下すと「知仁勇の三の者は天下の達徳なり．…．あるいは安んじてこれを行い，あるいは利してこれを行い，あるいは勉強してこれを行う．其の功を成すに及んでは一（いつ）なり.」となるようですが，訳は大体以下のようになります：

「知（知識），仁，勇（勇気）の三つは天下普遍の徳である．…．ある者はこれらを易々と行い，ある者はこれらを自分に利益のために行い，ある者は多大な努力によって行う．しかしひとたびその行為がなされたならば，同じことになる.」

　このように，もともと「勉強」は「多大な努力」という意味で使われており，だからこそお店で「おっちゃん，もうちょっと勉強してんか」と値切るときの言葉づかいも,「おっちゃんが多大な努力をして値引きする」という意味が元にあるようです．ですから，学習の場面で「勉強」と言うと，本来なら「多大な努力をして学習する」ことになるのではないでしょうか.

数学のどの分野も，やはり易々と身に付くものではなく,「多大な努力をして」こそ真の理解が得られる，ということが,「勉強」の語源からもうかがわれます．しかし，具体的にどのように「多大な努力」をすればよいのでしょうか，そこを私自身の経験も振り返りながら，お話ししていきたいと思います.

1　まず覚えよう

たとえば「6×3 は？」と聞かれたらすぐに「18」と答えられるでしょう．小学校で覚え（させられ）た「九九」のおかげです．それを基本として2桁，3桁の掛け算や，それだけでなく割り算もできるようになっている．いちいち「九九」の表を見ながら「345×678」を筆算でやることを想像してみてください.「九九」の記憶の恩恵がわかるでしょう.

では微積分で「九九」に当たるのは何か．それは次の五つの公式です：

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

とにかくこの五つを覚える．数 III をやってないんで，という人もこれだけまず覚えておけばあとはちょっとした応用です．そして「ろくさんじゅうはち」のときのように,「サインの微分はコサイン」と自然に口から出てくるようにしたい．それにはいくつも計算問題をやってみる．手を動かして覚えるのが大事です.

　線形代数でも事情は同じです.「行列の三種類の基本変形」をはじめのころ習います．その三つをとにかく覚える．もちろんこのときも，いくつも練習問題を自分の手を動かしてやってみることが大事です．いろいろな概念，ランクとか次元とか像とか，が出てきますが，基本変形ができるようになっていればどれもたいしたことはありません.

2　数学は厳密である？

　上で言ってきたようなことを聞くといやな顔をする数学者もいます.「数学はいくつかの公理に基づいて厳密に論証を展開していくものであり，その学習（勉強）も教育もその流れ通りに進めなければならない」と主張し，実践します．私自身も大学1年生のときに「微積分」と「線形代数」を習いましたが,「微積分」は「実数の構成」をいわゆる「有理数の切断」

に基づいて延々と行ったのちに「ε - δ 論法」を使って「連続性」,「微分可能性」等を厳密に定義していく，というスタイルでしたし,「線形代数」も「線形空間の公理」（10 個くらいある）から始めて，あらゆることを厳密に証明していく，というものでした．当然全くわかりませんでした．

ではその数学者に「6 × 3=18」について質問してみましょう．もし私なら「6 に 3 を掛けるというのは，6 を 3 個足すことであり，6+6+6 が 12+6 で 18 になるから正しい」と説明します．しかし彼は「6 を 3 個足すとは，(6+6)+6 と 6+(6+6) が等しいことを前提としている．足し算が結合法則を満たすことを確認しておくべきである」とまず文句を言い，さらに「6+6=12 が成り立つのは十進法だからであり，そのうえ $6+6=6+(4+2)=(6+4)+2=10+2=12$ という計算をしているのだから，やはり結合法則を使っているはずだ」とけちをつけてくるでしょう．そして「整数の足し算は自然数の足し算に基づいており，自然数の足し算はペアノの公理系から厳密に構成されるべきものである」と悦に入るかもしれません．

数学の研究者になるのならいざ知らす，いやそうだったとしても，数学のいろいろな分野を初めて学ぶときに，つねに公理から一歩一歩論理を積み上げげながら進んでいく，という方法は，一見厳密性を尊ぶようですが，実は学ぶ者のせっかくの好奇心や興味を失わせてしまう危険のほうが大きい．それで,「まず覚えることからはじめよう」と言ったのです．微積分でいえば，あの 5 つの公式だけでいろいろな図形の面積や体積が計算できたり，線形代数でいえば，3 つの基本変形だけで 4 次元の世界のしくみを垣間見ることができるのです．そして学習が進んで,「なぜこの公式が成り立つんだろう，なぜこんなにうまくいくんだろう，なぜこんなにきれいなんだろう」という疑問が出てきたらそのときが勉強のチャンスで，はじめに敬遠していた厳密性，公理的な論理展開が実は物事の理解を深めるんだ，ということがわかってきます．

最初に「勉強」は「多大な努力」を要する，といいました．そのとおりなのですが，しかし，ひとたび自分の中に自然な好奇心が生まれると，それが動機となって努力が苦にならなくなる，むしろ我を忘れて集中してしまい，後で振り返ってみると,「ああよく勉強したなあ」という時間，充実した時間となっているものです．

3　数学の本を読む前に：書く立場

読み方の前に，どのように数学の本が書かれているか，というお話をします．少し大きな本屋の数学のあたりにいくと，微積分や線形代数の本だけでも数十冊は並んでいます．しかし読者の立場や予備知識を考えて書かれたものは意外に少ないのです．私自身いくつか教科書を書いてきましたが，著者として「誰か数学がわかる人に読まれたときに，いい加減な書き方ではみっともない」という気持ちが強くなって,「定義をちゃんと書いて，定理も仮定を明示してしかもなるべく一般的な定式化に」しようとしたことが多々あります．その気持ちに打ち勝ちながらできるだけわかりやすいように，特に初めてその分野に触れる人がつまづいてしまう箇所に説明の重点をおきながら書いているつもりです．

一例をあげましょう．線形代数で「行列式」という大事な概念がありますが，たいていの教科書はそれを厳密に定義しようとして

$$\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{1\le i\le n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{i\sigma(i)} \qquad (*)$$

という複雑な式を持ち出します．あえて説明すると，S_n は「n 文字の置換の全体の集合」，$\prod_{1\le i\le n} f(i)$ は「関数 $f(i)$ の $i=1$ から $i=n$ までの値の全部の積」，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は「置換 σ の符号」，$a_{i\sigma(i)}$ は「行列 A の第 $(i,\sigma(i))$ 成分」という意味ですが，このそれぞれの意味がまたかなりの予備知識を必要とする概念になっています．しかし行列式を実際に計算するには，先ほど述べた「三種類の基本変形」を使えば驚くほど簡単にできてしまうのです．少なくとも私自身の線形代数の本はその立場で書いていますし，自分自身の研究においても行列式を計算しなければならない場面にしょっちゅう出会いますが，いつも基本変形を使ってやっています．先ほどの超厳密派の数学者でもきっとそうしているはずです．上の複雑な定義で具体的に計算することはあり得ません．

(*) のような式が必要ない，と主張しているのではありません．もし将来数学をもっと深く学びたい，と考えているなら必ずこの式の中身を理解しておく必要があります．しかし工学系の分野で行列式を使う，というのなら (*) に出てくる置換などの概念の理解よりも，行列式がどのような性質をもっているか，いろいろなものの体積計算に使えることや，多変数の微積分の変数変換公式にも使える，という知識のほうがはるかに重要だと思います．そして理系に進むのであっても，1 で述べた「まず覚

えよう」，まずは計算ができるようになること，それが将来の勉強への第一歩です．

4　数学の本の読み方・選び方

3でも述べたように，数学の本は厳密派向きのほうが多いものです．微積分や線形代数ならまだしも，少しすすんだテーマについての本やさらには論文になってくると，たいていは定義，定理，証明という順ですきを見せないように書いてある．私自身も論文としてまとめるときはそういう流儀で書かざるを得ません．ではそのタイプのものをどうやって読んでいくか．これも裏話が参考になるでしょう．数少ない定理を私が見つけたときの話です．まずはいくつもの例を手で計算していきます．（以前に48行120列の行列の基本変形を，何枚もの紙をのりで貼り合わせて計算したこともあります．）最近はMathematicaなどの強力な計算プログラムがあって，それにご厄介になることも多いのですが，逆に計算結果があまりにあっさり出過ぎて本質が見えないうらみがあり，わざと途中経過をいちいち打ち出すプログラムを作りながら使っています．するといくつかの計算例に共通して現れるパターンに気づき，「これは一般化できそうだ」というにおいを感じることがあります．そしてそれを定理として定式化し，多大な努力を払ってようやく証明が完成する，という道筋で論文になっていくのが普通です．他の数学者（主に代数系ですが）と話しても同じような苦労をして論文を仕上げているということをよく耳にします．ということは，そのような本や論文を出来上がったものとして後から読む私たちも，定理の発見の元となった例を知ることができれば，それを通して理解することで，発見の喜びを追体験することにもなり，その定理の本質をより自然に自分のものにすることができるでしょう．

したがって，「よい数学の本（そして論文）」とはそのような典型的な例，その定理や定義の本質を自然に想像させるような例を省略せずにのせてある本や論文である，と言っていい．建築現場に例えればその足場を残してくれている，あるいは建てていった手順を秘密にしない，といった本です．ですから始めて学ぶ人は，どれがそのように手の内を明かしてくれていて定評のある本や論文なのか，ということを先生や先輩に尋ねて教えてもらうとよいでしょう．つねに例を通して理解することを心がけるのが大事であり，よい本はそんな態度で勉強しようとする人を助けてくれるものです．

5　おわりに：ラマヌジャンのこと

$$e^{\sqrt{163}\pi}$$

これがどんな数かわかりますか．インドの数学者ラマヌジャン（Ramanujan, 1887/12/22-1920/4/26）は，この数がほとんど整数である，ということを手計算で発見しました．実際は

$$e^{\sqrt{163}\pi} = 262537412640768743.99999999999925007\cdots$$

であることを今ならパソコンですぐに確かめられます．小数点以下「9」がなんと 12 個も続くことに驚かされるでしょう．もちろんラマヌジャンのころにパソコンも電卓もありませんから，彼はこれを手で計算したのです．それにそもそもなぜ $e^{\sqrt{163}\pi}$ なのか．実はこの数が整数に異常に近いことの背後には深い数学的現象が隠されていることが今ではわかっています．その説明には「2 次体のイデアル類群の構造論」という代数学の理論,「楕円モジュラー関数論」という解析学の理論が使われます．前に述べた「よい具体例から定理を想像（創造）する」という話の極致がここにあるのです．

ラマヌジャンはその短い生涯に数千にもおよぶ公式や定理を発見し，それを書き付けたノートが残されています．しかしほとんど証明はつけられておらず，後世の数学者達が苦闘して正しいことを確認するのですが，彼自身の数学の知識は 15 歳のころに出会った「純粋数学要覧」という数学公式集だけだったそうですから，彼が得た膨大な公式はすべて数への超人的な愛着（執着）から生まれたと言うしかありません．むしろ今私たちが持っている数学の知識のほうが，当時のラマヌジャンより多いのではないでしょうか．ですから私たちが数学に深い愛着を持って，いつまでも素朴な好奇心を持ち続けるならば，彼には到底及ばないにしても，数学の理解さらには創造にきっとつながっていくと思います．